Sur les fonctions de deux variables f(x,y)

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables.

-***Dérivées partielles premières :***

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

-***Dérivées partielles secondes :***

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

-***Matrice Hessienne :***

La matrice Hessienne d'une fonction $f(x, y)$ est la matrice des dérivées partielles secondes :

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}$$

-***Recherche des Extrema sur f(x,y)***

Soit $f(x, y)$ une fonction de deux variables définie et dérivable. Pour trouver ses extremums, on suit les étapes suivantes :

1. *Calcul des dérivées partielles premières :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

*Ces équations permettent de déterminer les **points critiques** (x_0, y_0).*

2. *Calcul des dérivées partielles secondes :*

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

3. *Calcul du discriminant $D = det(H)$:*

$$D = f_{xx} f_{yy} - (f_{xy})^2$$

- *Si $D > 0$ et $f_{xx} > 0$, alors (x_0, y_0) est un **minimum local**.*
- *Si $D > 0$ et $f_{xx} < 0$, alors (x_0, y_0) est un **maximum local**.*
- *Si $D < 0$, alors (x_0, y_0) est un **point selle**.*
- *Si $D = 0$, le test est indéterminé.*

D<0 , Point selle   *D>0, **max** ou **min***

0 $\mathbb{R}$

$\downarrow$

D=0,Indéterminé

Exemple 1

Soit la fonction :

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Étape 1 : Calcul des dérivées premières

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

En résolvant $3x^2 - 3y = 0$ *et* $3y^2 - 3x = 0$*, on trouve les points critiques :* $(0,0)$ *et* $(1,1)$, $(-1,-1)$.

Étape 2 : Calcul des dérivées secondes

$$f_{xx} = 6x, \quad f_{yy} = 6y, \quad f_{xy} = -3$$

Étape 3 : Calcul du discriminant

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6x)(6y) - (-3)^2 = 36xy - 9$$

- *Pour* $(0,0)$, $D = det(H(0,0)) = -9$ *donc c'est un **point selle**.*
- *Pour* $(1,1)$, $Ddet(H(1,1)) = 36 - 9 = 27 > 0$ *et* $f_{xx} = 6 > 0$ *donc **minimum local**.*

Exemple 2

Cas où le test de la Hessienne est indéterminé
Considérons la fonction suivante :

$$f(x,y) = x^4 + y^4$$

Calcul des dérivées

Dérivées premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

En résolvant $4x^3 = 0$ *et* $4y^3 = 0$*, on trouve un unique point critique :*

$$(0,0)$$

Dérivées secondes :

$$f_{xx} = 12x^2, \quad f_{yy} = 12y^2, \quad f_{xy} = 0$$

Matrice Hessienne

$$H_f = \begin{bmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{bmatrix}$$

Calcul du discriminant

$$D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2 = (12x^2)(12y^2) - (0)^2 = 144x^2y^2$$

Interprétation

*- Pour $(0,0)$, on a $D = 144(0)(0) = 0$. - Le test est donc **indéterminé**.*

*Pour conclure, on doit analyser $f(x,y)$ directement. On remarque que $f(x,y) = x^4+y^4 \geq 0$ et que $f(0,0) = 0$, donc $(0,0)$ est un **minimum global**, mais ce résultat ne pouvait pas être déduit uniquement du test de la Hessienne.*

Comparaison avec d'autres points

Nous calculons les valeurs de $f(x,y)$ en quelques points proches de $(0,0)$:

$$f(1,0) = 1^4 + 0^4 = 1$$

$$f(0,1) = 0^4 + 1^4 = 1$$

$$f(1,1) = 1^4 + 1^4 = 2$$

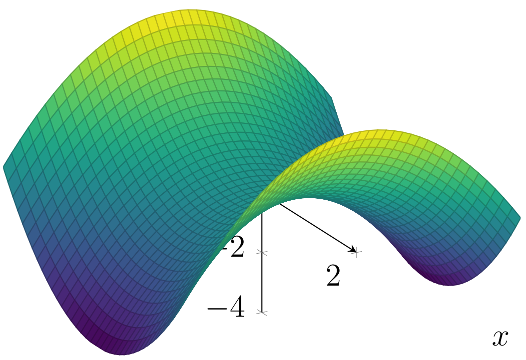
$$f(-1,0) = (-1)^4 + 0^4 = 1$$

Dans chaque cas, nous avons $f(x,y) \geq 0$ et $f(0,0) = 0$, donc $f(x,y) > f(0,0)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.

Conclusion

*La fonction $f(x,y) = x^4 + y^4$ est toujours positive ou nulle. Comme $f(0,0)$ est le plus petit des valeurs obtenues, $(0,0)$ est un **minimum global**.*

Surface en forme de selle, illustrant bien un point selle au point $(0,0)$ de la fonction $f(x,y) = x^2 - y^2$



y $f(x,y)$

Exercices sur séries de Fourier et extremas de $f(x, y)$

Exercice 1 sur les séries de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ -\pi \leq x < 0, \\ x & si\ 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1. *Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n de la fonction $f(x)$.*
2. *Écrire la série de Fourier de $f(x)$.*
3. *En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.*

Exercice 2 sur les séries de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction périodique de période 2π définie par :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si\ -\pi \leq x < 0, \\ 1 & si\ 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

1. *Calculer les coefficients de Fourier a_0, a_n et b_n de la fonction $f(x)$.*
2. *Écrire la série de Fourier de $f(x)$.*
3. *En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$.*

Exercice 1 sur les extrema de $f(x, y)$

Soit $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

1. *Trouver les points critiques de $f(x, y)$.*
2. *Déterminer la nature de ces points critiques (minimum local, maximum local, point selle).*

Exercice2 sur les extrema de $f(x, y)$

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 3x - 4y$.

1. *Trouver les points critiques de* $f(x, y)$.
2. *Déterminer la nature de ces points critiques (minimum local, maximum local, point selle).*